

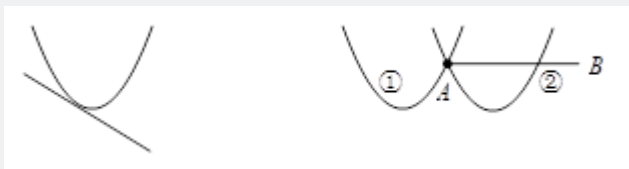
第2讲二次函数交点问题

一、直线与二次函数的交点问题

🔗 教法备注

在解决直线与抛物线交点个数问题时，关键是通过画图，找到交点个数变化的“临界位置”，临界位置可分为两类：

①切点：如下左图所示，当直线与抛物线相切时，直线与抛物线只有1个交点，此时若将直线向上平移，则交点个数变为2个；若向下平移，则交点个数变为0个，可见相切的情况是交点个数变化的“临界位置”。



②端点：如上右图所示，当抛物线位于位置①时，与射线AB有1个交点，若抛物线向左平移，交点个数变为0个；若抛物线向右平移到位置②时，交点个数变为2个，可见抛物线在平移过程中两次经过射线的端点A的情况是交点个数变化的“临界位置”。

对于“端点”的情况，我们可以将点坐标代入函数解析式求解，下面我们主要讨论“切点”的情况。

我们知道，求两个函数图象交点坐标时，应将两个函数的解析式联立，组成一个二元方程组，二元方程组的解就对应交点的坐标。例如：抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 与直线 $y = kx + t$ ($k \neq 0$) 的交点坐标就对应方程组 $\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = kx + t \end{cases}$ 的解。这个方程组有几组不同的解，两个函数图象就有几个交点。

在解这个方程组时，我们通常先将两式相减，消去 y ，得到关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + (b - k)x + c - t = 0$ ，这个方程根的情况决定了方程组解的个数。因此可以得到下表的对应关系：

图象	交点个数	方程组 $\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = kx + t \end{cases}$	关于 x 的一元二次 方程 $ax^2 + (b-k)x + c-t = 0$	判别式
	2个	2组解	两个不相等的实数根	$\Delta > 0$
	1个	1组解	两个相等的实数根	$\Delta = 0$
	无	无解	无实根	$\Delta < 0$

1. 求一次函数与二次函数的交点

典题精练

1. 当 k 为何值时, 函数 $y = -2x^2 + 5x + k$ 的图象与直线 $y = x - k$ 只有一个公共点, 有两个公共点, 没有公共点.

【答案】 当 $k = -1$, 只有一个公共点.

当 $k > -1$, 有两个公共点.

当 $k < -1$, 没有公共点.

【解析】 联立解析式可得
$$\begin{cases} y = -2x^2 + 5x + k \\ y = x - k \end{cases},$$

消去 y 可得 $-2x^2 + 4x + 2k = 0$.

$\therefore$ 判别式 $\Delta = 4^2 - 4 \times (-2) \times 2k = 16 + 16k$.

当 $\Delta = 0$, 只有一个公共点.

即 $16 + 16k = 0$,

解得: $k = -1$.

当 $\Delta > 0$, 有两个公共点.

即 $16 + 16k > 0$,

解得 $k > -1$.

当 $\Delta < 0$ ，没有公共点．

即 $16 + 16k < 0$ ，

解得 $k < -1$ ．

【标注】【知识点】一次函数与二次函数的交点

2. 已知：二次函数 $y = x^2 - 4x + 3a + 2$ （ a 为常数）．

（1）请写出该二次函数的三条性质．

（2）在同一直角坐标系中，若该二次函数的图象在 $x \leq 4$ 的部分与一次函数 $y = 2x - 1$ 的图象有两个交点，求 a 的取值范围．

【答案】（1）二次函数开口向上；当 $x > 2$ 时， y 随 x 的增大而增大；在 $x = 2$ 时，二次函数取最小值．

（2） $\frac{5}{3} \leq a < 2$ ．

【解析】（1）该二次函数的三条性质，

$\because x^2$ 的系数为 $1 > 0$ ，

$\therefore$ 二次函数开口向上……性质①，

$\therefore$ 对称轴为 $x = 2$ ，

$\therefore$ 当 $x < 2$ 时， y 随 x 的增大而减小，

当 $x > 2$ 时， y 随 x 的增大而增大……性质②，

在 $x = 2$ 时，二次函数取最小值……性质③．

（2）
$$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 3a + 2 \\ y = 2x - 1 \end{cases},$$

整理得 $x^2 - 6x + 3a + 3 = 0$ ，

$\Delta = 36 - 4(3a + 3) = 24 - 12a > 0$ ，

$\therefore a < 2$ ，

当 $x = 4$ 时， $y = x^2 - 4x + 3a + 2 \geq 2x - 1$ ，

解得 $a \geq \frac{5}{3}$ ，

综上 $\frac{5}{3} \leq a < 2$ ．

【标注】【知识点】一次函数与二次函数的交点

2. 直线与抛物线平移中的交点问题

3. 已知：抛物线与 x 轴交于 $A(-2, 0)$ 、 $B(4, 0)$ ，与 y 轴交于 $C(0, 4)$ 。

(1) 求抛物线顶点 D 的坐标。

(2) 设直线 CD 交 x 轴于点 E ，过点 B 作 x 轴的垂线，交直线 CD 于点 F ，将抛物线沿其对称轴上下平移，使抛物线与线段 EF 总有公共点。试探究：抛物线向上最多可以平移多少个单位长度，向下最多可以平移多少个单位长度？

【答案】 (1) 顶点 D 坐标为 $(1, \frac{9}{2})$ 。

(2) 要使抛物线与 EF 有公共点，向上最多可平移36个单位，向下最多可平移 $\frac{1}{8}$ 个单位。

【解析】 (1) 设抛物线解析式为 $y = a(x+2)(x-4)$ ，

$\because C$ 点坐标为 $(0, 4)$

$$\therefore a = -\frac{1}{2}.$$

$$\therefore \text{解析式为 } y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4,$$

$$\therefore \text{顶点 } D \text{ 坐标为 } (1, \frac{9}{2}).$$

(2) 设直线 CD 解析式为 $y = kx + b$ 。

$$\text{则 } \begin{cases} b = 4 \\ k + b = \frac{9}{2} \end{cases},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} b = 4 \\ k = \frac{1}{2} \end{cases},$$

$$\therefore \text{直线 } CD \text{ 解析式为 } y = \frac{1}{2}x + 4.$$

易得 $E(-8, 0)$ ， $F(4, 6)$ 。

若抛物线向下移 m 个单位，其解析式 $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4 - m (m > 0)$ 。

$$\text{由 } \begin{cases} y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4 - m \\ y = \frac{1}{2}x + 4 \end{cases},$$

$$\text{消去 } y, \text{ 得 } -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - m = 0.$$

$$\therefore \Delta = \frac{1}{4} - 2m \geq 0,$$

$$\therefore 0 < m \leq \frac{1}{8},$$

$\therefore$ 向下最多可平移 $\frac{1}{8}$ 个单位。

若抛物线向上移 m 个单位，其解析式 $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4 + m (m > 0)$ 。

方法一：当 $x = -8$ 时， $y = -36 + m$ ，

当 $x = 4$ 时, $y = m$,

要使抛物线与 EF 有公共点, 则 $-36 + m \leq 0$ 或 $m \leq 6$,

$\therefore 0 < m \leq 36$.

方法二: 当平移后的抛物线过点 $E(-8, 0)$ 时, 解得 $m = 36$,

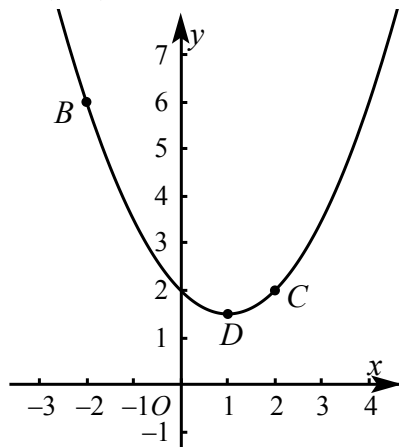
当平移后的抛物线过点 $F(4, 6)$ 时, $m = 6$,

由题意知: 抛物线向上最多可以平移36个单位长度.

综上, 要使抛物线与 EF 有公共点, 向上最多可平移36个单位, 向下最多可平移 $\frac{1}{8}$ 个单位.

【标注】【知识点】一次函数与二次函数的交点

4. 在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $y = ax^2 + bx + 2$ 过点 $B(-2, 6)$, $C(2, 2)$ 两点.



(1) 试求抛物线的解析式.

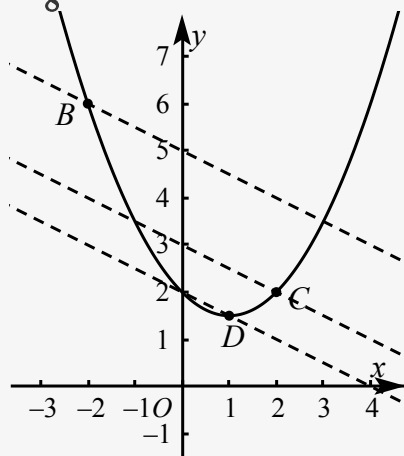
(2) 记抛物线顶点坐标为 D , 若直线 $y = -\frac{1}{2}x$ 向上平移 b 个单位所得的直线与抛物线段 BDC (包括端点 B 、 C) 部分有两个交点, 求 b 的取值范围.

【答案】 (1) $y = \frac{1}{2}x^2 - x + 2$.

(2) $\frac{15}{8} < b \leq 3$.

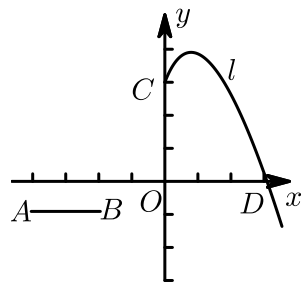
【解析】 (1)
$$\begin{cases} 4a - 2b + 2 = 6 \\ 4a + 2b + 2 = 2 \end{cases},$$
$$\begin{cases} 4a - 2b = 4 \\ 4a + 2b = a \end{cases},$$
$$\begin{cases} 2a - b = 2 \\ 2a + b = a \end{cases},$$
$$\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -1 \end{cases}.$$
$$\therefore y = \frac{1}{2}x^2 - x + 2.$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad y &= \frac{1}{2}(x^2 - 2x) + 2 \\
 &= \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{3}{2} . \\
 \therefore D\left(1, \frac{3}{2}\right) . \\
 y &= -\frac{1}{2}x + b . \\
 \text{过} B(-2, b) , \\
 b &= 1 + b , b = 5 . \\
 \text{过} C(2, 2) , \\
 2 &= -1 + b , b = 3 . \\
 \begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + b \\ y = \frac{1}{2}x^2 - x + 2 \end{cases} . \\
 \frac{1}{2}x^2 - x + 2 &= -\frac{1}{2}x + b , \\
 \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 2 - b &= 0 . \\
 \Delta &= \frac{1}{4} - 4 \times \frac{1}{2}(2-b) \\
 &= \frac{1}{4} - 4 + 2b = 0 . \\
 2b &= \frac{15}{4} . \\
 b &= \frac{15}{8} . \\
 \therefore \frac{15}{8} < b \leq 3 .
 \end{aligned}$$



【标注】【知识点】动直线（线段）与定抛物线交点问题

5. 已知点 $O(0, 0)$, $A(-4, -1)$, 线段 AB 与 x 轴平行 , 且 $AB = 2$, 抛物线 $G: y = -x^2 + mx + n$ (m , n 为常数) 经过点 $C(0, 3)$ 和 $D(3, 0)$.



- (1) 求 G 的解析式及其对称轴和顶点坐标 .
- (2) 判断点 B 是否在 G 上 , 并说明理由 .
- (3) 若线段 AB 以每秒2个单位长的速度向下平移 , 设平移的时间为 t (秒) .
- ① 若 G 与线段 AB 总有公共点 , 直接写出 t 的取值范围 .
 - ② 若 G 同时以每秒3个单位长的速度向下平移 , G 在 y 轴及其右侧图象与直线 AB 总有两个公共点 , 求 t 的取值范围 .

【答案】 (1) 抛物线 G 解析式为 $y = -x^2 + 2x + 3$,
对称轴为 $x = 1$, 顶点坐标为 $(1, 4)$.

(2) 不在 , 证明见解析 .

(3) ① $2 \leq t \leq 10$.

② $4 \leq t < 5$.

【解析】 (1) 把点 $C(0, 3)$ 和 $D(3, 0)$ 的坐标代入 $y = -x^2 + mx + n$ 中 ,

$$\text{得} \begin{cases} n = 3 \\ -3^2 + 3m + n = 0 \end{cases} ,$$

$$\text{解得} \begin{cases} n = 3 \\ m = 2 \end{cases} ,$$

$\therefore$ 抛物线 G 解析式为 $y = -x^2 + 2x + 3$,

对称轴为 $x = 1$, 顶点坐标为 $(1, 4)$.

(2) 不在 ,

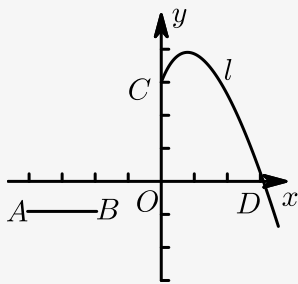
$\because A(-4, -1)$, 线段 AB 与 x 轴平行 , $AB = 2$,

$\therefore B(-2, -1)$,

把 $x = -2$, 代入 $y = -x^2 + 2x + 3$, 得 $y = -5 \neq -1$,

$\therefore$ 点 B 不在抛物线 G 上 .

(3) ①



设点 B 的坐标为 $(-2, -1 - 2t)$ ，点 A 的坐标为 $(-4, -1 - 2t)$ ，

当抛物线 G 经过点 B 时，有 $y = -(-2)^2 + 2 \times (-2) + 3 = -5$ ，

当抛物线 G 经过点 A 时，有 $y = -(-4)^2 + 2 \times (-4) + 3 = -21$ ，

当抛物线 G 与线段 AB 总有公共点时，有 $-21 \leq -1 - 2t \leq -5$ ，

解得： $2 \leq t \leq 10$ 。

② 平移过程中，设点 C 的坐标为 $(0, 3 - 3t)$ ，抛物线 G 的顶点坐标为 $(1, 4 - 3t)$ ，

如果直线 AB 与抛物线 G 在 y 轴及其右侧的图象总有两个公共点，

$$\text{则有} \begin{cases} -1 - 2t \geq 3 - 3t \\ -1 - 2t < 4 - 3t \end{cases}$$

解得： $4 \leq t < 5$ 。

【标注】【知识点】动直线（线段）与动抛物线交点问题

6. 在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y = x^2 - 2mx + m^2 - m + 2$ 的顶点为 D 。线段 AB 的两个端点分别为 $A(-3, m)$ ， $B(1, m)$ 。

(1) 求点 D 的坐标（用含 m 的代数式表示）。

(2) 若该抛物线经过点 $B(1, m)$ ，求 m 的值。

(3) 若线段 AB 与该抛物线只有一个公共点，结合函数的图象，求 m 的取值范围。

【答案】(1) $D(m, 2 - m)$ 。

(2) m 的值为1或3。

(3) $1 \leq m \leq 3$ 。

【解析】(1) $\because$ 抛物线 $y = x^2 - 2mx + m^2 - m + 2$ 的顶点为 D ，

$$\therefore y = (x - m)^2 - m + 2,$$

$$\therefore D(m, 2 - m)。$$

(2) $\because$ 抛物线 $y = x^2 - 2mx + m^2 - m + 2$ 经过点 $B(1, m)$ ，

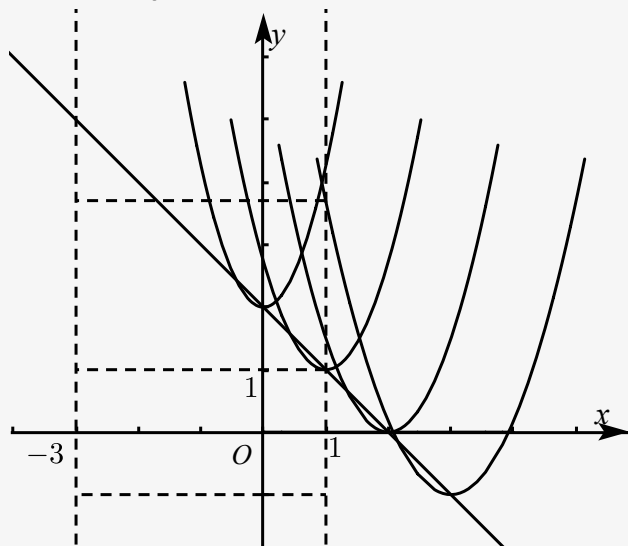
$$\therefore 1 - 2m + m^2 - m + 2 = m,$$

$$m^2 - 4m + 3 = 0, (m - 1)(m - 3) = 0,$$

$$\text{即 } m_1 = 1, m_2 = 3。$$

故 m 的值为1或3.

(3) 已知抛物线 $y = x^2 - 2mx + m^2 - m + 2$ 的顶点为 $D(m, 2 - m)$,



顶点在直线 $y = -x + 2$ 上运动.

当 $m < 1$ 时, 抛物线 $y = x^2 - 2mx + m^2 - m + 2$ 与线段 AB 没有交点,

当 $m \geq 1$ 时, 当 $x = 1$ 的函数值 $y = m^2 - 3m + 3$ 应该小于等于 m ,

即 $m^2 - 4m + 3 \leq 0$, 解得 $1 \leq m \leq 3$.

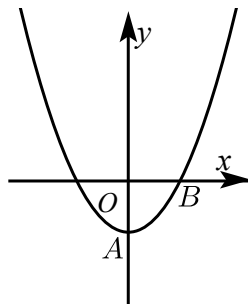
故抛物线与线段 AB 只有一个公共点时 $1 \leq m \leq 3$.

【标注】【知识点】一次函数与二次函数的交点

3. 直线旋转中的交点问题

典题精练

7. 如图, 在平面直角坐标系中, 抛物线 $C_1: y = ax^2 - a^2 (a > 0)$, 经过点 $B(1, 0)$, 顶点为 A .



(1) 求抛物线 C_1 的解析式.

(2) 将抛物线 C_1 绕点 B 旋转 180° 后得到抛物线 C_3 , 直线 $y = kx - 2k + 4$ 总经过一定点 M , 若过定点 M 的直线 l 与抛物线 C_3 只有一个公共点, 求直线 l 的解析式.

【答案】 (1) $y = x^2 - 1$.

$$(2) l: x = 2 \text{ 或 } y = 2\sqrt{3}x + 4 - 4\sqrt{3} \text{ 或 } y = -2\sqrt{3}x + 4 + 4\sqrt{3}.$$

【解析】(1) 将 $B(1, 0)$ 代入抛物线中的

$$a - a^2 = 0,$$

$$a(a - 1) = 0,$$

$$\because a > 0,$$

$$\therefore a = 1,$$

$$\therefore C_1: y = x^2 - 1.$$

$$(2) C_3: y = -(x - 2)^2 + 1, M(2, 4),$$

情况一: l 为 $x = 2$;

情况二: 设 $l: y = mx - 2m + 4$;

$$\text{联立: } \begin{cases} y = mx - 2m + 4 \\ y = -x^2 + 4x - 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 + (m - 4)x + 7 - 2m = 0,$$

$$\therefore \Delta = (m - 4)^2 - 4(7 - 2m) = 0,$$

$$\therefore m_1 = 2\sqrt{3}, m_2 = -2\sqrt{3},$$

$$\therefore l \text{ 解析式为: } y = 2\sqrt{3}x - 4\sqrt{3} + 4 \text{ 或 } y = -2\sqrt{3}x + 4\sqrt{3} + 4,$$

综上: l 解析式为 $y = 2\sqrt{3}x - 4\sqrt{3} + 4$ 或 $y = -2\sqrt{3}x + 4\sqrt{3} + 4$ 或 $x = 2$.

【标注】【知识点】一次函数与二次函数的交点

8. 已知: 关于 x 的一元二次方程 $-x^2 + (m + 1)x + (m + 2) = 0$ ($m > 0$).

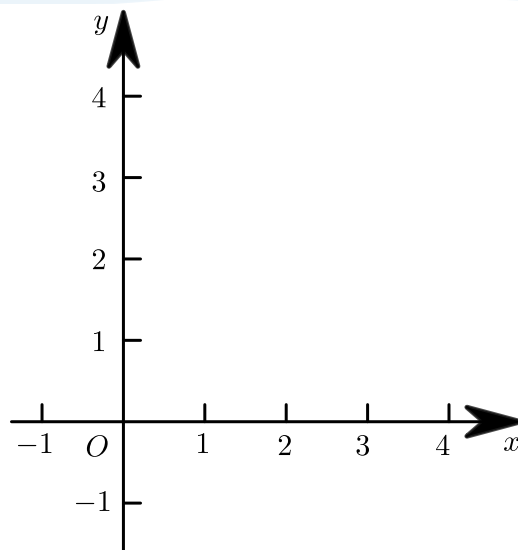
(1) 求证: 该方程有两个不相等的实数根.

(2) 当抛物线 $y = -x^2 + (m + 1)x + (m + 2)$ 经过点 $(3, 0)$, 求该抛物线的表达式.

(3) 在 (2) 的条件下, 记抛物线 $y = -x^2 + (m + 1)x + (m + 2)$ 在第一象限之间的部分为图象

G , 如果直线 $y = k(x + 1) + 4$ 与图象 G 有公共点, 请结合函数的图象, 求直线

$y = k(x + 1) + 4$ 与 y 轴交点的纵坐标 t 的取值范围.



【答案】 (1) 证明见解析 .

(2) $y = -x^2 + 2x + 3$.

(3) $3 < t \leq 4$.

【解析】 (1) $\because \Delta = (m+1)^2 - 4 \times (-1) \times (m+2) = (m+3)^2$,

$$\because m > 0 ,$$

$$\therefore (m+3)^2 > 0 ,$$

$$\text{即 } \Delta > 0 ,$$

$\therefore$ 原方程有两个不相等的实数根 .

(2) $\because$ 抛物线 $y = -x^2 + (m+1)x + (m+2)$ 经过点 $(3, 0)$,

$$\therefore -3^2 + 3(m+1) + (m+2) = 0 ,$$

$$\therefore m = 1 .$$

$$\therefore y = -x^2 + 2x + 3 .$$

(3) $\because y = -x^2 + 2x + 3 = -(x-1)^2 + 4$,

$\therefore$ 该抛物线的顶点为 $(1, 4)$.

$\therefore$ 当直线 $y = k(x+1) + 4$ 经过顶点 $(1, 4)$ 时 ,

$$\therefore 4 = k(1+1) + 4 ,$$

$$\therefore k = 0 ,$$

$$\therefore y = 4 .$$

$\therefore$ 此时直线 $y = k(x+1) + 4$ 与 y 轴交点的纵坐标为 4 .

$$\because y = -x^2 + 2x + 3 ,$$

$$\therefore \text{当 } x = 0 \text{ 时 } , y = 3 ,$$

$\therefore$ 该抛物线与 y 轴的交点为 $(0, 3)$.

$\therefore$ 此时直线 $y = k(x + 1) + 4$ 与 y 轴交点的纵坐标为3.

$\therefore 3 < t \leq 4$.

【标注】【知识点】动直线（线段）与定抛物线交点问题

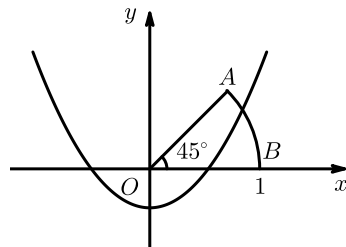
4. 几何图形与抛物线平移中的交点个数问题

🔗 教法备注

抛物线与几何图形的交点问题和与直线的交点问题类似，在解决此类问题时，需要考虑在平移过程中：①抛物线经过几何图形的顶点，②抛物线与几何图形各条边相切，这两类情况中，交点个数是否产生变化.

🔗 典题精练

9. 如图，以扇形 OAB 的顶点 O 为原点，半径 OB 所在的直线为 x 轴，建立平面直角坐标系，其中点 B 的坐标为 $(1, 0)$ ，若抛物线 $y = x^2 + k$ 与扇形 OAB 的边界总有两个公共点，则实数 k 的取值范围是 _____.



【答案】 $-1 < k < \frac{1}{4}$

【解析】 由图可知， $\angle AOB = 45^\circ$,

$\therefore$ 直线 OA 的解析式为 $y = x$,

$$\text{联立} \begin{cases} y = x \\ y = x^2 + k \end{cases},$$

消掉 y 得： $x^2 - x + k = 0$,

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 1 \times k = 0,$$

即 $k = \frac{1}{4}$ 时，抛物线与 OA 有一个交点，

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(1, 0)$,

$\therefore OA = 1$,

$\therefore$ 点 A 的坐标为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

∴交点在线段 AO 上.

当抛物线经过点 $B(1,0)$ 时, $1+k=0$,

解得 $k=-1$,

∴要使抛物线 $y=x^2+k$ 与扇形 OAB 的边界总有两个公共点, 实数 k 的取值范围是 $-1 < k < \frac{1}{4}$.

故答案为: $-1 < k < \frac{1}{4}$.

【标注】【知识点】二次函数与角度问题

10. 在平面直角坐标系中, 抛物线 $y = -\frac{m-1}{2}x^2 + \frac{3}{2}mx + m^2 - 3m + 2$ 与 x 轴的交点分别为原点 O 和点 A , 点 $B(4, n)$ 在这条抛物线上.

(1) 求抛物线的表达式及点 B 的坐标.

(2) 连接 AB , 将线段 AB 平移至 OC , 使得点 A 与点 O 重合, 请直接写出点 C 的坐标.

(3) 在(2)的条件下, 将抛物线向左平移 $k(k > 0)$ 个单位, 请你结合图象回答: 当平移后的抛物线与四边形 $OABC$ 有两个公共点时, 求 k 的取值范围.

【答案】(1) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x$, $B(4, 4)$.

(2) $(-2, 4)$.

(3) $4 < k < \frac{25}{4}$.

【解析】(1) ∵抛物线经过原点 O ,

∴令 $x=0$ 得, $m^2 - 3m + 2 = 0$,

解得 $m_1 = 1$, $m_2 = 2$,

∵ $-\frac{m-1}{2} \neq 0$, 得 $m \neq 1$,

∴ $m = 2$,

∴抛物线的解析式为 $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x$.

∵点 $B(4, n)$ 在这条抛物线上,

∴ $n = -\frac{1}{2} \times 4^2 + 3 \times 4 = -8 + 12 = 4$,

∴点 $B(4, 4)$.

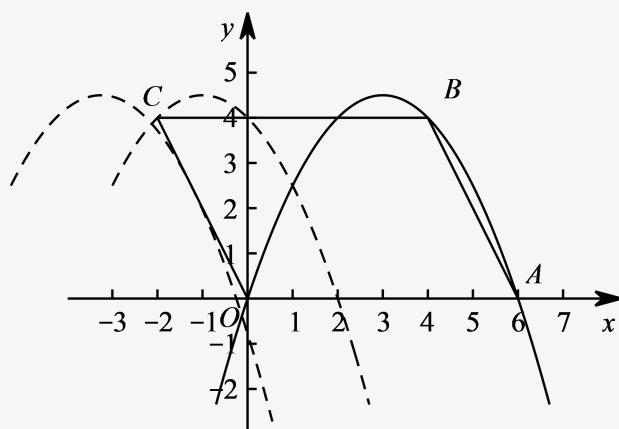
(2) 令 $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x = 0$, 解得 $x_1 = 0$, $x_2 = 6$

∴ $A(6, 0)$,

∴连接 AB , 将线段 AB 平移至 OC , 使得点 A 与点 O 重合, 点 $B(4, 4)$,

∴点 A 、 B 向左平移6个单位,

$$\therefore C(-2, 4).$$



(3) 由上面的函数图象可知, 当平移后的抛物线与四边形 $OABC$ 有两个公共点时, k 得取值范围为 $4 < k < \frac{25}{4}$.

【标注】【知识点】二次函数与坐标轴交点

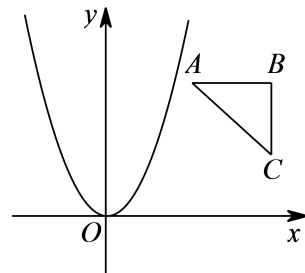
5. 抛物线开口变化中的交点问题

教法备注

抛物线开口大小变化时, 同样需要考虑过端点与相切两种情况, 此外一些题目中抛物线开口方向不定, 还需要对开口方向进行分类讨论.

典题精练

11. 已知 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的顶点坐标为 $A(1, 2)$, $B(2, 2)$, $C(2, 1)$, 若抛物线 $y = ax^2$ 与该直角三角形无公共点, 则 a 的取值范围是 _____.



【答案】 $a < 0$ 或 $a > 2$ 或 $0 < a < \frac{1}{4}$

【解析】 $\because$ 抛物线 $y = ax^2$ 与 $\text{Rt}\triangle ABC$ 无公共点, $A(1, 2)$, $B(2, 2)$, $C(2, 1)$,

∴可分两种情况：

① $a < 0$ 时，抛物线开口向下，与直角三角形无公共点．

② $a > 0$ 时，

如果 $y = ax^2$ 经过点 A ，那么 $a = 2$ ，

∴ $a > 2$ 时，抛物线 $y = ax^2$ 与该直角三角形无公共点，

如果 $y = ax^2$ 经过点 C ，那么 $4a = 1$ ，解得 $a = \frac{1}{4}$ ，

∴ $0 < a < \frac{1}{4}$ 时，抛物线 $y = ax^2$ 与该直角三角形无公共点，

综上所述，若抛物线 $y = ax^2$ 与该直角三角形无公共点，则 a 的取值范围是 $a < 0$ 或 $a > 2$

或 $0 < a < \frac{1}{4}$ ，

故答案为 $a < 0$ 或 $a > 2$ 或 $0 < a < \frac{1}{4}$ ．

【标注】【知识点】二次函数与直角三角形结合

12. 在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $y = 4x + 4$ 与 x 轴、 y 轴分别交于点 A ， B ，抛物线 $y = ax^2 + bx - 3a$ 经过点 A ，将点 B 向右平移5个单位长度，得到点 C ．

(1) 求点 C 的坐标．

(2) 求抛物线的对称轴．

(3) 若抛物线与线段 BC 恰有一个公共点，结合函数图象，求 a 的取值范围．

【答案】(1) $C(5, 4)$ ．

(2) 对称轴 $x = 1$ ．

(3) $a < -\frac{4}{3}$ 或 $a = -1$ 或 $a \geq \frac{1}{3}$ ．

【解析】(1) ∵ $y = 4x + 4$ 与 x 轴， y 轴交点 A 、 B ，

令 $x = 0$ ，

∴ $y = 4$ ，

∴ $B(0, 4)$ ，

∴将点 B 向右平移5个单位得到 C ，

∴ $C(5, 4)$ ．

(2) 令 $y = 0$ ，

∴ $x = -1$ ，

∴ $A(-1, 0)$ ，

将 $A(-1, 0)$ 代入 $y = ax^2 + bx - 3a$ 中，

得到 $b = -2a$ ，

$$\therefore y = ax^2 - 2ax - 3a ,$$

$\therefore$ 对称轴 $x = 1$.

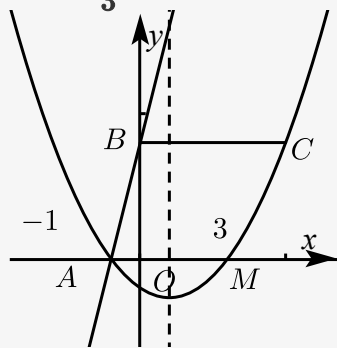
$$(3) y = ax^2 - 2ax - 3a = a(x^2 - 2x - 3) = a(x - 3)(x + 1) ,$$

抛物线与 x 轴交于 $A(-1, 0)$, $M(3, 0)$ 两点 ,

① 当 $a > 0$ 时 , 将 $C(5, 4)$ 代入抛物线解析式 ,

$$\text{得 } a = \frac{1}{3} ,$$

即 $a \geq \frac{1}{3}$ (如图) ,



② 当 $a < 0$ 时 , 将 $B(0, 4)$ 代入抛物线解析式 ,

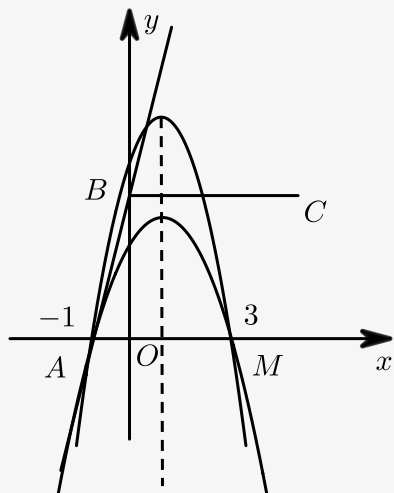
$$\text{得 } a = -\frac{4}{3} ,$$

$$\text{即 } a < -\frac{4}{3} ,$$

当抛物线的顶点过 $(1, 4)$ 时 , $a = -1$,

$$\text{即 } a < -\frac{4}{3} \text{ 或 } a = -1 \text{ (如图) ,}$$

综上所述 , $a < -\frac{4}{3}$ 或 $a = -1$ 或 $a \geq \frac{1}{3}$.



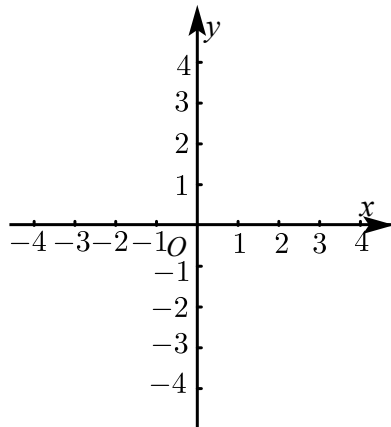
【标注】【知识点】定直线（线段）与动抛物线交点问题

6. 复杂变化中的交点问题

13. 在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $y = x^2 - 2ax + a^2 - \frac{1}{a}$ 的对称轴与 x 轴交于点 A .

(1) 若抛物线与 x 轴交于 P, Q 两点, 且 $PQ = 2$, 求抛物线的解析式.

(2) 点 B 的坐标为 $(0, \frac{1}{4} - \frac{1}{a})$, 若该抛物线与线段 AB 恰有一个公共点, 结合函数图象, 直接写出 a 的取值范围.



【答案】(1) $y = x^2 - 2x$.

(2) $-\frac{1}{2} \leq a < 0$ 或 $a \geq \frac{1}{2}$.

【解析】(1) 方法一: $\because$ 抛物线与 x 轴交于 P, Q 两点, 且 $PQ = 2$,

$\therefore$ 不妨设点 P 在点 Q 左侧, 则点 P 的坐标为 $(a-1, 0)$,

点 Q 的坐标为 $(a+1, 0)$,

$$\therefore (a-1)(a+1) = a^2 - \frac{1}{a},$$

解得 $a = 1$,

此时, 抛物线的解析式为 $y = x^2 - 2x$.

故答案为 $y = x^2 - 2x$.

$$\text{方法二: } \Delta = 4a^2 - 4\left(a^2 - \frac{1}{a}\right) = \frac{4}{a} > 0,$$

解得: $a > 0$,

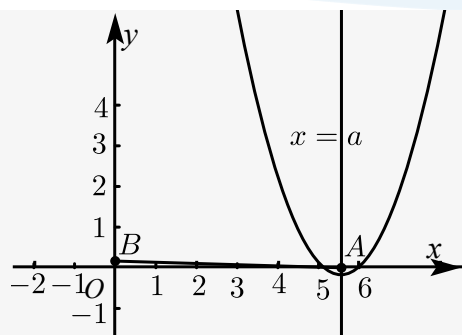
$$x^2 - 2ax + a^2 - \frac{1}{a} = 0, \quad x_1 + x_2 = 2a, \quad x_1 x_2 = a^2 - \frac{1}{a},$$

$$PQ = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \sqrt{\frac{4}{a}} = 2, \text{ 解得: } a = 1,$$

故抛物线的解析式为: $y = x^2 - 2x$.

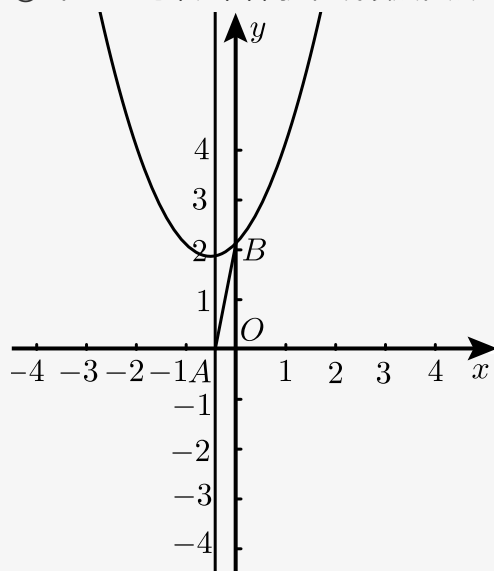
(2) 抛物线 $y = x^2 - 2ax + a^2 - \frac{1}{a}$ 的开口向上, 顶点坐标为 $(a, -\frac{1}{a})$.

① 当 $a \geq \frac{1}{2}$ 时, 函数图象如下:



此时顶点在 x 轴下方，一定与 AB 有一个交点．

②当 $a < 0$ 时，如图，抛物线顶点在点 A 的上方：



当点 B 在抛物线与 y 轴交点上方时，抛物线与 AB 有一个交点，

$$\text{即 } \frac{1}{4} - \frac{1}{a} \geq a^2 - \frac{1}{a},$$

$$\text{解得 } -\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{1}{2},$$

$$\text{即 } -\frac{1}{2} \leq a < 0.$$

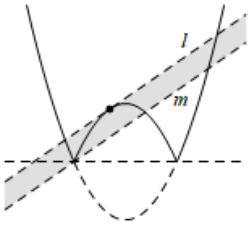
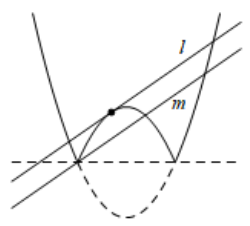
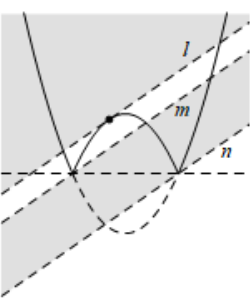
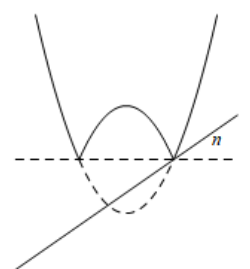
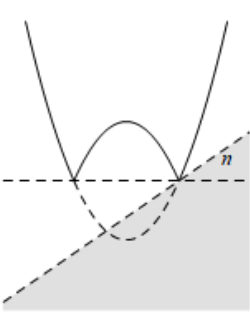
综上， a 的取值范围为 $-\frac{1}{2} \leq a < 0$ 或 $a \geq \frac{1}{2}$ ．

故答案为 $-\frac{1}{2} \leq a < 0$ 或 $a \geq \frac{1}{2}$ ．

【标注】【知识点】动直线（线段）与动抛物线交点问题

二、直线与翻折后的抛物线的交点问题

1. 抛物线沿水平直线翻折

图象	直线范围或位置	交点个数
	直线 l, m 之间	4个
	直线 l 或直线 m	3个
	直线 l 上方或 直线 m, n 之间	2个
	直线 n	1个
	直线 n 下方	0个

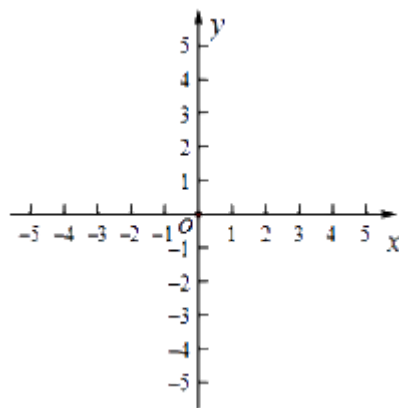
典题精练

14. 已知：抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 经过点 $A(2, -3)$ 和 $B(4, 5)$.

(1) 求抛物线的表达式及顶点坐标 .

(2) 将抛物线沿 x 轴翻折，得到图象 G_1 ，求图象 G_1 的表达式 .

- (3) 设 B 点关于对称轴的对称点为 E ，抛物线 $G_2: y = ax^2 (a \neq 0)$ 与线段 EB 恰有一个公共点，结合函数图象，求 a 的取值范围。



【答案】 (1) $y = x^2 - 2x - 3$ ，顶点坐标为 $(1, -4)$ 。

(2) 图象 G_1 的表达式为： $y = -x^2 + 2x + 3$ 。

(3) $\frac{5}{16} \leq a < \frac{5}{4}$ 。

【解析】 (1) 把 $A(2, -3)$ 和 $B(4, 5)$ 分别代入 $y = x^2 + bx + c$ ，

$$\text{得：} \begin{cases} -3 = 4 + 2b + c \\ 5 = 16 + 4b + c \end{cases}, \text{解得：} \begin{cases} b = -2 \\ c = -3 \end{cases},$$

$\therefore$ 抛物线的表达式为： $y = x^2 - 2x - 3$ 。

$$\therefore y = x^2 - 2x - 3 = (x - 1)^2 - 4.$$

$\therefore$ 顶点坐标为 $(1, -4)$ 。

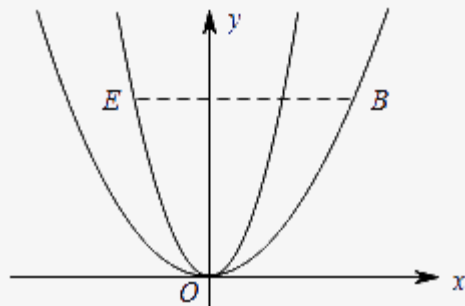
(2) $\therefore$ 将抛物线沿 x 轴翻折，得到图象 G_1 与原抛物线图形关于 x 轴对称，

$\therefore$ 图象 G_1 的表达式为： $y = -x^2 + 2x + 3$ 。

(3) $\therefore B(4, 5)$ ，对称轴： $x = 1$ 。

$\therefore B$ 点关于对称轴的对称点 E 点坐标为 $(-2, 5)$ 。

如图，当 G_2 过 E 、 B 点时为临界，



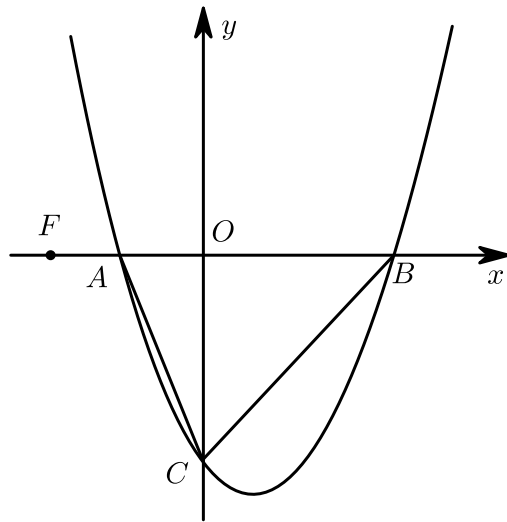
代入 $E(-2, 5)$ ，则 $a = \frac{5}{4}$ ，

代入 $B(4, 5)$ ，则 $a = \frac{5}{16}$ 。

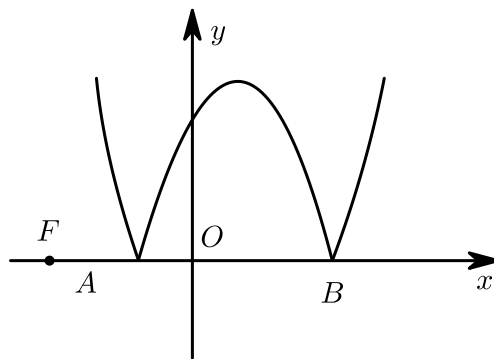
$\therefore \frac{5}{16} \leq a < \frac{5}{4}$ 。

【标注】【知识点】动直线（线段）与动抛物线交点问题

15. 如图，抛物线 $y = ax^2 + bx - 3$ 经过点 $A(-1, 0)$ ， $B(3, 0)$ ，交 y 轴于点 C 。



- (1) 求此抛物线的解析式。
- (2) 如图，将抛物线在 A 、 B 间的部分沿 x 轴向上翻折，翻折后的图形与原来抛物线的剩余部分组成一个新图形 C_2 ，若过点 $F(-2, 0)$ 的直线 $l: y = kx + b$ (k, b 为常数) 与图形 C_2 只有两个公共点，求 k 的取值范围。



【答案】(1) $y = x^2 - 2x - 3$ 。

(2) $k > 6 + 2\sqrt{5}$ 或 $k = 0$ 。

【解析】(1) 依题意得 $\begin{cases} 0 = a - b - 3 \\ 0 = 9a + 3b - 3 \end{cases}$ ，

$$\text{解得：} \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases}，$$

$\therefore$ 抛物线 $y = x^2 - 2x - 3$ 。

(2) $\because F(-2, 0)$ ， $\therefore 0 = -2k + b$ ， $b = 2k$ ，

$\therefore$ 直线 $l: y = kx + 2k$ ，

易得： $C_2: y = -x^2 + 2x + 3$,

①当 $k = 0$ 且 $b = 0$ 时， l 与 C_2 只有两个公共点；

②当 $k \neq 0$ 时，将 l 与 C_2 联立化简得： $x^2 + (k-2)x + 2k-3 = 0$,

$$\Delta = (k-2)^2 - 4(2k-3) = 0,$$

解得： $k_1 = 6 + 2\sqrt{5}$, $k_2 = 6 - 2\sqrt{5}$,

$\therefore k > 6 + 2\sqrt{5}$.

综上所述： k 的取值范围是 $k > 6 + 2\sqrt{5}$ 或 $k = 0$.

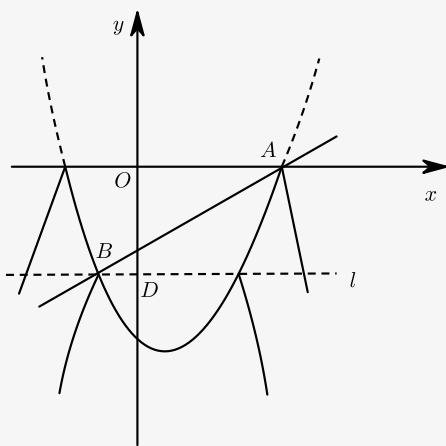
【标注】【知识点】一次函数与二次函数的交点

16. 在平面直角坐标系 xOy 中，点 P 在抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 - x - 4$ 上，过点 P 作 y 轴的垂线 l ，垂足为 $D(0, d)$. 将抛物线在直线 l 上方的部分沿直线 l 翻折，图象的其余部分保持不变，得到一个新图象 G . 当图象 G 与直线 $y = \frac{1}{2}x - 2$ 只有两个公共点时，求 d 的取值范围.

【答案】 $-\frac{5}{2} < d < 0$.

【解析】 令直线 $y = \frac{1}{2}x - 2$ 与原抛物线的两交点为 A, B ，则直线 l 经过点 A, B 时为临界状态，再结合图象，即可得 d 的取值范围.

故答案为： $-\frac{5}{2} < d < 0$.



【标注】【知识点】动直线（线段）与定抛物线交点问题

17. 若二次函数 $y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - 1$ 的图象与 y 轴的交点为 A ，过点 A 作直线 $l \parallel x$ 轴，将抛物线在 y 轴左侧部分沿直线 l 翻折，其余部分保持不变，得到一个新图象，直线 $y = \frac{1}{3}x + b$ 与新图象只有一个公共点 $P(x_0, y_0)$ ，且 $y_0 \leq 7$ ，求 b 的取值范围.

【答案】 $-1 < b \leq 5$ 或 $b < -\frac{7}{4}$.

【解析】 当直线 $y = \frac{1}{3}x + b$ 经过点 $(0, -1)$ 时, 得 $b = -1$.

当直线与原抛物线只有一个交点时, 令 $\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - 1 = \frac{1}{3}x + b$,

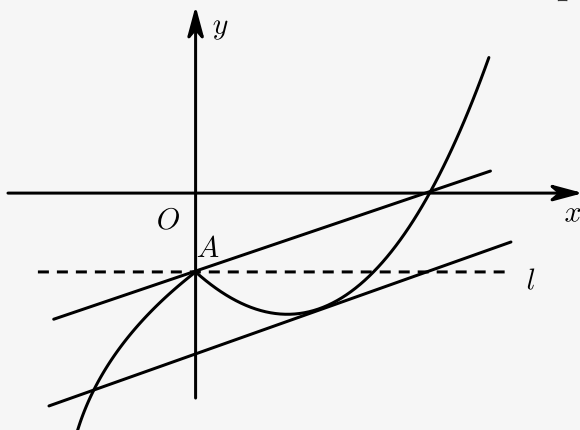
整理得 $x^2 - 3x - 3 - 3b = 0$,

则 $\Delta = 9 + 4(3 + 3b) = 0$, 即 $b = -\frac{7}{4}$.

当 $\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - 1 = 7$ 时, 解得 $x_1 = 6$, $x_2 = -4$ (舍),

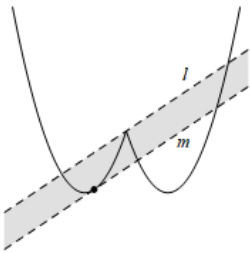
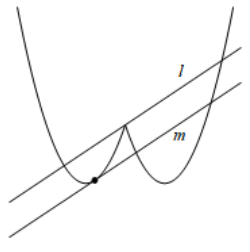
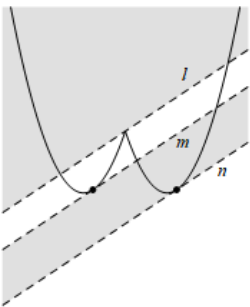
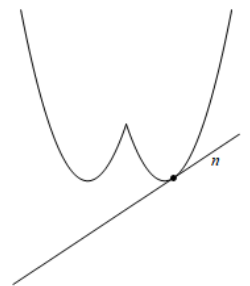
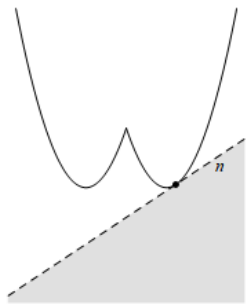
将 $(6, 7)$ 代入直线 $y = \frac{1}{3}x + b$, 得 $b = 5$,

结合函数图象, 可得当 $-1 < b \leq 5$ 或 $b < -\frac{7}{4}$ 时, 直线与新图象只有一个公共点.



【标注】 【知识点】 动直线 (线段) 与定抛物线交点问题

2. 抛物线沿竖直直线翻折

图象	直线范围或位置	交点个数
	直线 l , m 之间	4个
	直线 l 或直线 m	3个
	直线 l 上方或 直线 m , n 之间	2个
	直线 n	1个
	直线 n 下方	0个

典题精练

18. 如图, 将函数 $y = x^2 - 2x$ ($x \geq 0$) 的图象沿 y 轴翻折得到一个新的图象, 前后两个图象其实就是函数 $y = x^2 - 2|x|$ 的图象.

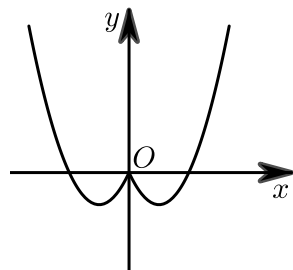


图 1

(1) 观察思考 :

函数图象与 x 轴有 _____ 个交点 , 所以对应的方程 $x^2 - 2|x| = 0$ 有 _____ 个实数根 , 方程 $x^2 - 2|x| = 2$ 有 _____ 个实数根 , 关于 x 的方程 $x^2 - 2|x| = a$ 有 4 个实数根时 , a 的取值范围是 _____ .

(2) 拓展探究 :

① 如图 2 , 将直线 $y = x + 1$ 向下平移 b 个单位 , 与 $y = x^2 - 2|x|$ 的图象有三个交点 , 求 b 的值 .

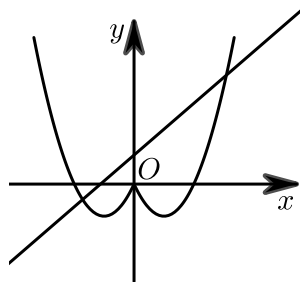


图 2

② 如图 3 , 将直线 $y = kx$ ($k > 0$) 绕着原点旋转 , 与 $y = x^2 - 2|x|$ 的图象交于 A, B 两点 (A 左 B 右) , 直线 $x = 1$ 上有一点 P , 在直线 $y = kx$ ($k > 0$) 旋转的过程中 , 是否存在某一时刻 , $\triangle PAB$ 是一个以 AB 为斜边的等腰直角三角形 (点 P, A, B 按顺时针方向排列) . 若存在 , 请求出 k 值 , 若不存在 , 请说明理由 .

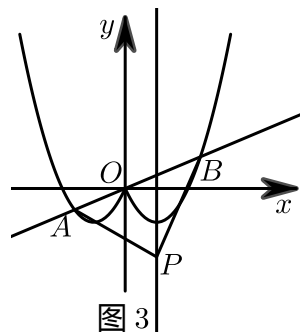


图 3

【答案】 (1) 3 ; 3 ; 2 ; $-1 < a < 0$

(2) ① 1 或 $\frac{5}{4}$.

② 存在 , $k = \frac{1}{3}$.

【解析】 (1) 函数 $y = x^2 - 2|x|$ 的图象与 x 轴交于点 $(-2, 0)$, $(0, 0)$, $(2, 0)$, 有 3 个交点 ,

$\therefore$ 方程 $x^2 - 2|x| = 0$ 有 3 个实数根 ,

观察图象可知方程 $x^2 - 2|x| = 2$ 有 2 实数根 ,

关于 x 的方程 $x^2 - 2|x| = a$ 有 4 个实数根时 ,

a 的取值范围是 $-1 < a < 0$.

(2) ① 设平移后的直线的解析式为 $y = x + 1 - b$,

观察图象可知 , 当直线 $y = x + 1 - b$ 经过原点或与抛物线 $y = x^2 + 2x$ 值有一个交点时 ,

与 $y = x^2 - 2|x|$ 的图象有三个交点 ,

$$\therefore 1 - b = 0 ,$$

$$b = 1 ,$$

$$\text{由} \begin{cases} y = x + 1 - b \\ y = x^2 + 2x \end{cases} ,$$

消去 y 得到 $x^2 + x - 1 + b = 0$,

由题意得 $\Delta = 0$,

$$\therefore 1 - 4(-1 + b) = 0 ,$$

$$\therefore b = \frac{5}{4} ,$$

综上所述 , 满足条件的 b 的值为 1 或 $\frac{5}{4}$.

② 如图 3 中 , 作 $BE \perp$ 直线 $x = 1$ 于 E , $AF \perp$ 直线 $x = 1$ 于 F ,

$$\therefore \angle AFP = \angle PEB = \angle APB = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle APF + \angle PAF = 90^\circ , \angle APF + \angle BPE = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle PAF = \angle BPE ,$$

$$\therefore PA = PB ,$$

$$\therefore \triangle PAF \cong \triangle BPE ,$$

$$\therefore AF = PE , PF = BE ,$$

$$\text{由} \begin{cases} y = kx \\ y = x^2 + 2x \end{cases} ,$$

$$\text{解得} \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = k - 2 \\ y = k(k - 2) \end{cases} ,$$

$$\therefore A(k - 2, k(k + 2)) ,$$

$$\text{由} \begin{cases} y = kx \\ y = x^2 - 2x \end{cases} ,$$

$$\text{解得} \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = k + 2 \\ y = k(k + 2) \end{cases} ,$$

$$\therefore B(k + 2, k(k + 2)) ,$$

$$\therefore BE = PF = k + 1 ,$$

$$AF = PE = 3 - k ,$$

$$\therefore P(1, k^2 - 3k - 1) ,$$

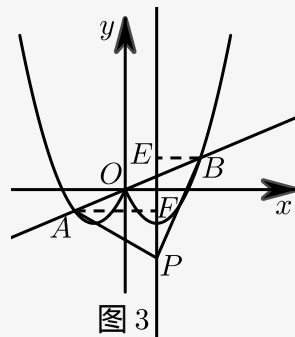


图 3

$$\begin{aligned}\therefore k^2 + 2k - (k^2 - 3k - 1) &= 3 - k, \\ \therefore k &= \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

【标注】【知识点】二次函数与一元二次方程的关系

19. 在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $y = ax^2 + 4x + c (a \neq 0)$ 经过点 $A(3, -4)$ 和 $B(0, 2)$.

(1) 求抛物线的表达式和顶点坐标.

(2) 将抛物线在 A 、 B 之间的部分记为图象 M (含 A 、 B 两点). 将图象 M 沿直线 $x = 3$ 翻折, 得到图象 N . 若过点 $C(9, 4)$ 的直线 $y = kx + b$ 与图象 M 、图象 N 都相交, 且只有两个交点, 求 b 的取值范围.

【答案】(1) 抛物线的表达式为 $y = -2x^2 + 4x + 2$, 顶点坐标为 $(1, 4)$.

(2) $-8 < b < -2$ 或 $b = 4$.

【解析】(1) $\because$ 抛物线 $y = ax^2 + 4x + c (a \neq 0)$ 经过点 $A(3, -4)$ 和 $B(0, 2)$,

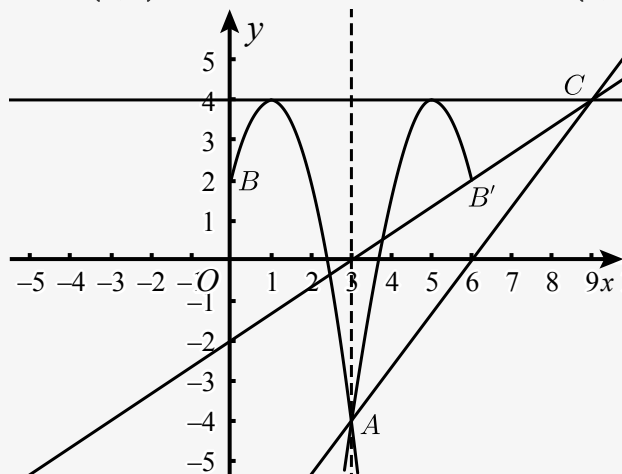
$$\text{可得: } \begin{cases} 9a + 12 + c = -4 \\ c = 2 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} a = -2 \\ c = 2 \end{cases},$$

$\therefore$ 抛物线的表达式为 $y = -2x^2 + 4x + 2$,

$\therefore$ 顶点坐标为 $(1, 4)$.

(2) 设点 $B(0, 2)$ 关于 $x = 3$ 的对称点为 B' , 则点 $B'(6, 2)$.



若直线 $y = kx + b$ 经过点 $C(9, 4)$ 和 $B'(6, 2)$, 可得 $b = -2$.

若直线 $y = kx + b$ 经过点 $C(9, 4)$ 和 $A(3, -4)$, 可得 $b = -8$.

当直线 $y = kx + b$ 平行 x 轴时, $b = 4$.

综上, $-8 < b < -2$ 或 $b = 4$.

【标注】【知识点】二次函数关于平行坐标轴的直线对称

三、抛物线开口大小与整点问题

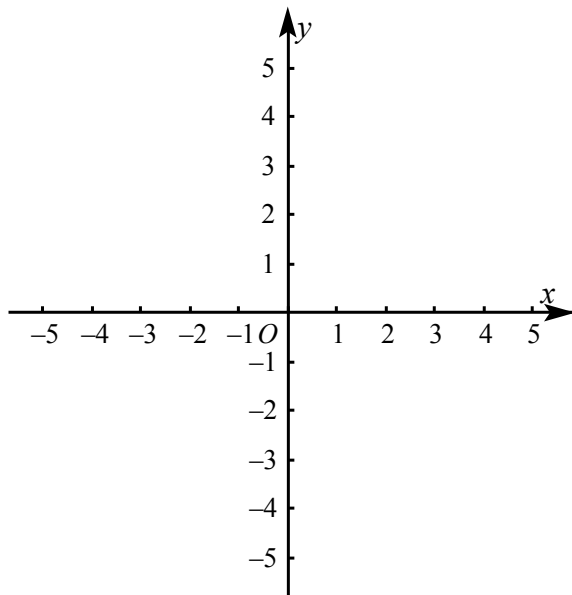
🔗 教法备注

在抛物线与坐标轴围成区域所含整数点个数问题中需注意以下几点：

- ① 封闭区域是否包含边界， x 轴上整数点较容易找到；
- ② 根据图形的对称性，对称轴左侧和右侧区域整数点的个数相同，需额外注意对称轴上整数点的个数；
- ③ 讨论封闭区域的边界点，抛物线的顶点，抛物线与 x 轴的交点，用枚举法列举区域内所有的整点。

🔗 典题精练

20. 在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y = mx^2 - 2mx + m - 1 (m > 0)$ 与 x 轴的交点为 A, B 。



- (1) 求抛物线的顶点坐标。
- (2) 横、纵坐标都是整数的点叫做整点。
 - ① 当 $m = 1$ 时，求线段 AB 上整点的个数。
 - ② 若抛物线在点 A, B 之间的部分与线段 AB 所围成的区域内（包括边界）恰有6个整点，结合函数的图象，求 m 的取值范围。

【答案】 (1) 抛物线的顶点坐标为 $(1, -1)$ 。

(2) ① 线段 AB 上有3个整点。

② m 的取值范围为 $\frac{1}{9} < m \leq \frac{1}{4}$ 。

【解析】(1) 解法一：

$$\text{对称轴 } x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2m}{2m} = 1,$$

当 $x = 1$ 时, $y = -1$,

$\therefore$ 抛物线的顶点坐标为 $(1, -1)$.

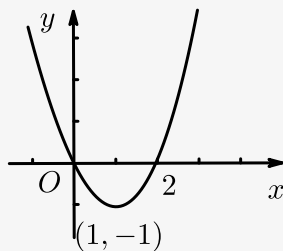
$$\text{解法二: } y = mx^2 - 2mx + m - 1 = m(x-1)^2 - 1,$$

$\therefore$ 抛物线的顶点坐标为 $(1, -1)$.

(2) ① 当 $m = 1$ 时, $y = x^2 - 2x$,

令 $y = 0$, 得到 $x_1 = 0, x_2 = 2$;

则线段 AB 上的整数点有 $(0, 0)$ 、 $(1, 0)$ 、 $(2, 0)$, 共 3 个.



② 因为顶点为 $(1, -1)$, 所以整点只能落在顶点和 x 轴上.

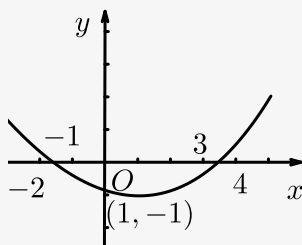
因为有 6 个整数点, 所以 x 轴上应该有 5 个.

根据对称性知, 当二次函数经过点 $(3, 0)$ 和 $(4, 0)$ 之间 (包括 $(3, 0)$) 时, 符合题意.

将 $(3, 0)$ 代入二次函数, 得 $m = \frac{1}{4}$;

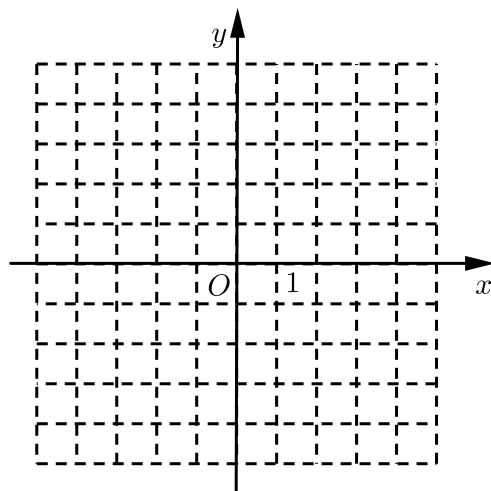
将 $(4, 0)$ 代入, 得 $m = \frac{1}{9}$;

$\therefore m$ 的取值范围为 $\frac{1}{9} < m \leq \frac{1}{4}$.



【标注】【知识点】二次函数与整点问题

21. 在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $y = ax^2 - 2ax - 3a (a \neq 0)$ 的顶点为 D , 与 x 轴交于 A, B 两点 (A 在 B 的左侧).



(1) 当 $a = 1$ 时, 求点 A, B, D 的坐标.

(2) 横, 纵坐标都是整数的点叫做整点. 若抛物线在点 A, B 之间的部分与线段 AB 所围成的区域内 (不含边界) 恰有 7 个整点, 结合函数图象, 求 a 的取值范围.

【答案】 (1) $A(-1, 0), B(3, 0), D(1, -4)$.

(2) $-1 \leq a < -\frac{3}{4}$ 或 $\frac{3}{4} < a \leq 1$.

【解析】 (1) $\because y = ax^2 - 2ax - 3a$,

$$= a(x^2 - 2x - 3),$$

$$= a(x+1)(x-3),$$

令 $y = 0$, 得 $x = -1$, 或 $x = 3$,

$$\therefore A(-1, 0), B(3, 0),$$

当 $a = 1$ 时, 抛物线化为 $y = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 - 4$,

$$\therefore D(1, -4).$$

(2) 如图, 当 $a > 0$ 时,

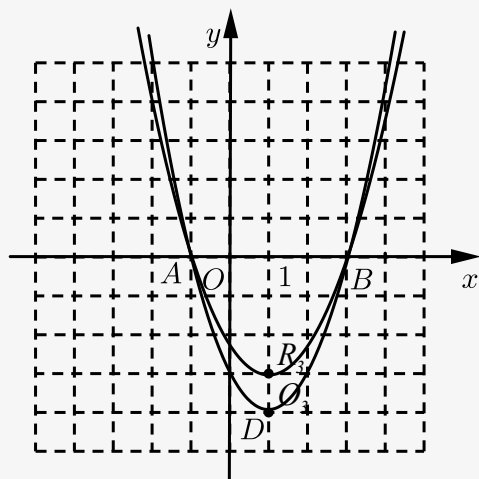
当 $a = 1$ 时, 抛物线在点 A, B 之间的部分与线段 AB 所围成的区域内恰有 7 个整点;

当 $a = \frac{3}{4}$ 时, 抛物线在点 A, B 之间的部分与线段 AB 所围成的区域内有 6 个整点;

结合函数图象可得, $\frac{3}{4} < a \leq 1$;

当 $a < 0$ 时, 同理可得 $-1 \leq a < -\frac{3}{4}$;

$\therefore a$ 的取值范围是 $-1 \leq a < -\frac{3}{4}$, 或 $\frac{3}{4} < a \leq 1$.



【标注】【知识点】二次函数与整点问题

四、分段函数

22. 已知函数 $y = \begin{cases} -x^2 + nx + n, & (x \geq n) \\ -\frac{1}{2}x^2 + \frac{n}{2}x + \frac{n}{2}, & (x < n) \end{cases}$ (n 为常数) .

(1) 当 $n = 5$ 时 ,

① 点 $P(4, b)$ 在此函数图象上 , 求 b 的值 .

② 求此函数的最大值 .

(2) 已知线段 AB 的两个端点坐标分别为 $A(2, 2)$, $B(4, 2)$, 当此函数的图象与线段 AB 只有一个交点时 , 直接写出 n 的取值范围 .

(3) 当此函数图象上有 4 个点到 x 轴的距离等于 4 时 , 求 n 的取值范围 .

【答案】(1) ① $\frac{9}{2}$.

② $\frac{45}{8}$.

(2) $2 \leq n < \frac{8}{3}$ 或 $\frac{18}{5} < n < 4$.

(3) 函数图象上有 4 个点到 x 轴的距离等于 4 时 , $n \geq 8$ 或 $n = 4$ 或 $n \leq -8$ 或 $n = -2 - 2\sqrt{5}$.

【解析】(1) ① 当 $n = 5$ 时 , $y = \begin{cases} -x^2 + 5x + 5 & (x \geq 5) \\ \frac{1}{2}(-x^2 + 5x + 5) & (x < 5) \end{cases}$,

当 P 在图象上时 , $x = 4$ 代入 $b = \frac{9}{2}$.

② 左支右支对称轴都为 $x = \frac{5}{2}$,

$$\text{左支最大值 } y = \frac{45}{8},$$

$$\text{右支最大值, } x = 5 \text{ 时, } y = 5,$$

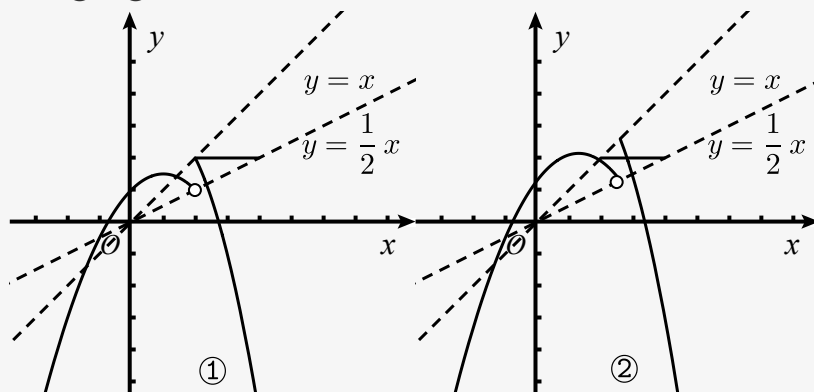
$$\text{则此时函数最大值为 } \frac{45}{8}.$$

(2) 函数在 $x = n$ 时, 左右两支断点不同.

左支断点, 将 $x = n$ 代入可得 $(n, \frac{n}{2})$, 可见其轨迹在 $y = \frac{1}{2}x$ 上,

右支断点, 将 $x = n$ 代入可得 (n, n) , 可见其轨迹在 $y = x$ 上.

如图①, ②, 此时为 AB 只有一个交点时两临界状态.

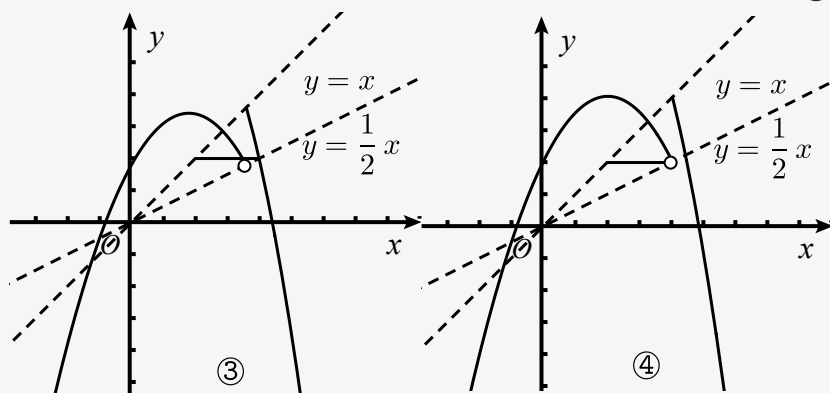


此时, 当 $x = 2$ 时, 右支大于等于 2, 左支小于 2,

$$\begin{cases} -4 + 2n + n \geq 2 \\ -2 + n + \frac{n}{2} < 2 \end{cases}$$

$$\text{解得 } 2 \leq n < \frac{8}{3}.$$

随着 n 增大, 函数与 AB 两交点, 只有一个交点时两临界状态如图③, ④.



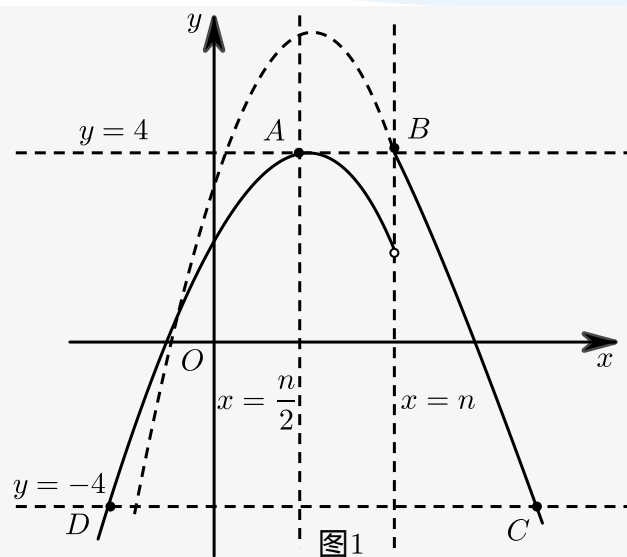
此时, 当 $x = 4$ 时, 右支大于 2, 当 $x = 4$ 时, 左支小于 2,

$$\begin{cases} -16 + 4n + n \gg 2 \\ -8 + 2n + \frac{n}{2} < 2 \end{cases}$$

$$\text{解得 } \frac{18}{5} < n < 4.$$

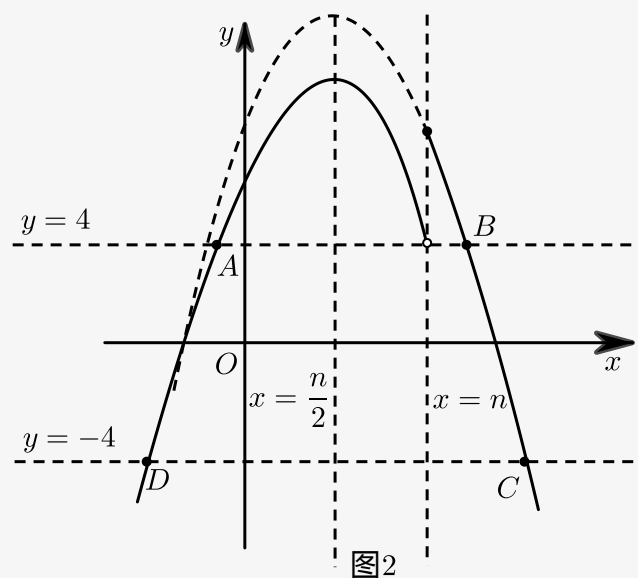
综上, 当 $2 \leq n < \frac{8}{3}$ 或 $\frac{18}{5} < n < 4$ 时, 函数与 AB 只有一个交点.

(3) $n > 0$ 时, $n > \frac{n}{2}$, 函数图象如图实线所示.



①如图1中，当点A的纵坐标为4，
 则有 $-\frac{n^2}{8} + \frac{n^2}{4} + \frac{n}{2} = \frac{n^2}{8} + \frac{n}{2} = 4$ 时，解得 $n = 4$ 或 $n = -8$ （舍去），
 观察图象可知： $n = 4$ 时，满足条件的点恰好有四个，分别是A，B，C，D。

②如图2中，观察图象可知，



当 $n \geq 8$ 时，恰好有四个点满足条件，分别是图中A，B，C，D。

$n < 0$ 时， $n < \frac{n}{2}$ ，函数图象如图中实线。

③如图3中，当点A的纵坐标为4时，

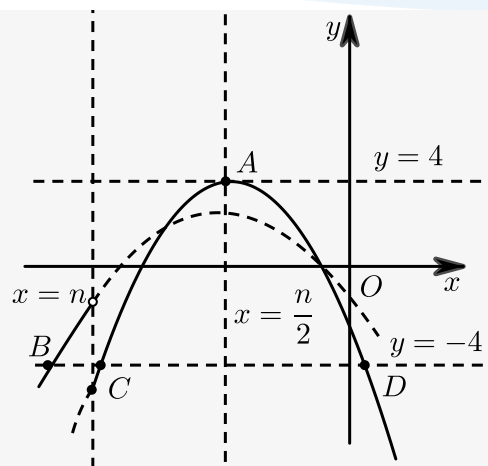


图3

恰好有四个点满足条件，分别是图中 A, B, C, D 。

则有： $-\frac{n^2}{4} + \frac{n^2}{2} + n = 4$ 时，

解得 $n = -2 - 2\sqrt{5}$ 或 $n = -2 + 2\sqrt{5}$ （舍弃）。

④如图4中，当 $n \leq -8$ 时，观察图象可知，

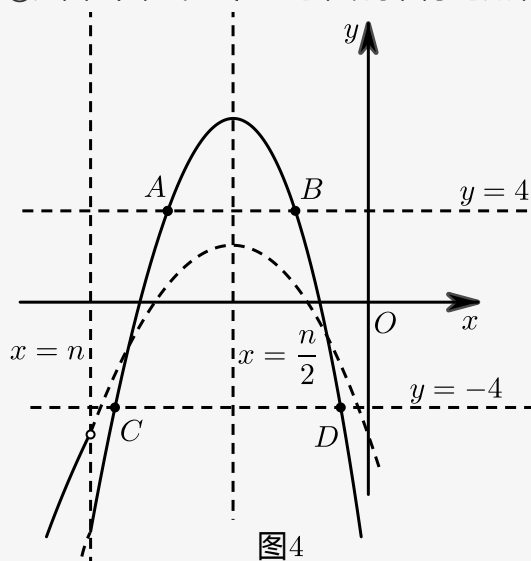


图4

恰好有四个点满足条件，分别是图中 A, B, C, D 。

综上所述，函数图象上有4个点到 x 轴的距离等于4时，

$n \leq -8$ 或 $n = -2 - 2\sqrt{5}$ 或 $n = 4$ 或 $n \geq 8$ 。

【标注】【知识点】二次函数与坐标轴交点